Equations différentielles linéaires

I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$ et F désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Equation linéaire d'ordre 1

1°) Equation différentielle scalaire

Déf : On appelle équation différentielle (scalaire) linéaire d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme $x' = a(t)x + b(t)$ avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ fonctions continues et de fonction inconnue $x : I \to \mathbb{K}$ dérivable

Théorème :

Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{K}$, l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

2°) Système différentiel

Déf : On appelle système différentiel linéaire d'ordre 1 de taille n défini sur I tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \cdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

avec $a_{i,j}, b_i : I \to \mathbb{K}$ fonctions continues et d'inconnue $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ de I vers $\mathbb{K}^n$ dérivable.

3°) Equation différentielle matricielle

Déf : On appelle équation différentielle (matricielle) linéaire d'ordre 1 de taille n définie sur I toute équation de la forme : $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ fonctions continues et de fonction inconnue $X : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable.

4°) Equation différentielle vectorielle

Déf : On appelle équation différentielle (vectorielle) linéaire d'ordre 1 à valeurs dans F définie sur I toute équation de la forme $E : x' = [a(t)](x) + b(t)$ avec $a : I \to \mathcal{L}(F)$ et $b : I \to F$ des fonctions continues et de fonction inconnue $x : I \to F$ dérivable.

II. Résolution d'une équation linéaire d'ordre 1

1°) Problème de Cauchy

Déf : Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in F$. On appelle problème de Cauchy la détermination des solutions sur I de l'équation $E : x' = a(t)x + b(t)$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Théorème de Cauchy (admis)

Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in F$, l'équation différentielle $E : x' = a(t)x + b(t)$ possède une unique solution vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

2°) Equation homogène

Déf : On appelle équation homogène associée à E l'équation $E_0 : x' = a(t)x$.

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de E_0 est un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, F)$ de dimension $n = \dim F$.

Déf : On appelle système fondamental de solutions de $E_0 : x' = a(t).x$ toute famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ d'éléments de l'espace $\mathcal{S}_0$ (i.e. toute base de $\mathcal{S}_0$).

Prop : Soit $t_0 \in I$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ des solutions de E_0 sur I. On a équivalence entre :

(i) $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions de E_0,

(ii) $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ est une base de l'espace F.

Déf : Soit $\mathcal{B}$ une base de F et $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une famille de solutions de E_0. On appelle wronskien dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ la fonction: $t\mapsto W(t)=\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$.

Théorème :

On a équivalence entre :

(i) $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est un système fondamental de solutions,

(ii) $\forall t\in I, W(t)\neq 0$,

(iii) $\exists t_0\in I, W(t_0)\neq 0$.

3°) Equation complète

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de E sur I est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,F)$ de direction $\mathcal{S}_0$ (et donc de dimension n)

4°) Méthode de la variation des constantes

Supposons connu un système fondamental $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de solutions de E_0 : $\mathcal{S}_0=\{\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n / \lambda_k\in\mathbb{K}\}$.

Théorème :

Il existe des fonctions continues $\alpha_1,\dots,\alpha_n : I\to\mathbb{K}$ telles que $b=\alpha_1\varphi_1+\dots+\alpha_n\varphi_n$ et si $\lambda_1,\dots,\lambda_n : I\to\mathbb{K}$ sont des primitives des fonctions $\alpha_1,\dots,\alpha_n : I\to\mathbb{K}$ alors $x=\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n$ est solution particulière de E sur I.

III. Equation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

F désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$

1°) Définition

Déf : On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant définie sur I et à valeurs dans F toute équation différentielle de la forme $x'=ax+b(t)$ avec $a\in\mathcal{L}(F)$ et $b : I\to F$ continue.

2°) Résolution de l'équation homogène

Théorème :

Soit $a\in\mathcal{L}(F)$ et $x_0\in F$. L'unique solution à l'équation $x'=ax$ vérifiant $x(0)=x_0$ est la fonction $x : t\mapsto \exp(ta)x_0$.

Cor : L'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation matricielle $X'=AX$ vérifiant $X(0)=X_0$ est $X(t)=\exp(tA)X_0$.

Cor : $\mathcal{S}_0=\{t\mapsto \exp(ta)x_0 / x_0\in F\}$.

Prop : $\forall s,t\in\mathbb{R}$: $\exp(ta)\exp(sa)=\exp((t+s)a)$ et par suite $\exp(-a)=(\exp(a))^{-1}$.

3°) Résolution de l'équation complète

Théorème :

Soit $a\in\mathcal{L}(F)$, $b : I\to F$ continue, $t_0\in I$ et $x_0\in F$. L'unique solution sur I de l'équation différentielle $E : x'=ax+b(t)$ est $x : t\mapsto \exp\big((t-t_0)a\big)\left(x_0+\int_{t_0}^{t}\exp\big((t_0-u)a\big)b(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

4°) Résolution pratique

La résolution de l'équation $x'=ax+b(t)$ se ramène à la détermination de $\exp(ta)$. Il est alors pertinent d'opérer la réduction de l'endomorphisme a.

a) cas diagonalisable

S'il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de a alors dans cette base l'équation $x' = ax + b(t)$ équivaut au système différentiel : $\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + b_1(t) \\ \cdots \\ x_n' = \lambda_n x_n + b_n(t) \end{cases}$ dont la résolution est immédiate.

b) cas trigonalisable

S'il existe une base $\mathcal{B}$ réalisant la trigonalisation de a alors dans cette base l'équation $x' = ax + b(t)$ équivaut au système différentiel : $\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + *x_2 + \cdots + *x_n + b_1(t) \\ \quad \ddots \\ x_{n-1}' = \lambda_{n-1} x_{n-1} + *x_n + b_{n-1}(t) \\ x_n(t) = \lambda_n x_n + b_n(t) \end{cases}$ qui se résout en cascade.

IV. Equations linéaires scalaires d'ordre 2

1°) Définition

Déf : On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 2 définie sur I toute équation de la forme $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ avec $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

2°) Le problème de Cauchy

Déf : Soit $t_0 \in I$ et $x_0, x_0' \in \mathbb{K}$, le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ satisfaisant aux conditions initiales : $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

Théorème de Cauchy :

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $x_0, x_0' \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle $E : x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant les conditions initiales : $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_0'$.

lemme :

On a équivalence entre

(i) x est solution sur I de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$

(ii) x est le premier élément d'un couple (x_0, x_1) solution sur I du système différentiel : $\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = -a(t)x_1 - b(t)x_0 + c(t) \end{cases}$.

3°) Résolution théorique de l'équation homogène

Déf : On appelle équation homogène associée à E l'équation $E_0 : x'' = a(t)x' + b(t)x$.

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur I de l'équation homogène E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

Déf : On appelle système fondamental de solutions de $E_0 : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ toute famille libre (φ, ψ) formée de solutions sur I de E_0 (i.e. toute base de $\mathcal{S}_0$)

Prop : Soit $t_0 \in I$ et φ, ψ des solutions de E_0 sur I. On a équivalence entre :

(i) (φ, ψ) est un système fondamental de solutions de E_0,

(ii) Les couples $(\varphi(t_0), \varphi'(t_0))$ et $(\psi(t_0), \psi'(t_0))$ forment une base de $\mathbb{K}^2$.

Déf : On appelle wronskien d'une famille (φ, ψ) de solutions de E_0 la fonction $t \mapsto W(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$.

Théorème :

On a équivalence entre :

(i) (φ,ψ) est un système fondamental de solution,

(ii) $\forall t\in I, W(t)\neq 0$,

(iii) $\exists t_0\in I, W(t_0)\neq 0$.

4°) Résolution pratique de l'équation homogène

a) recherche de solutions polynomiales

b) recherche de solutions développables en séries entières

c) méthode de Lagrange

Soit $E_0 : x''=a(t)x'+b(t)x$ avec $a,b:I\to\mathbb{K}$ continues.

On suppose connue une solution φ de E_0 ne s'annulant pas sur I .

On résout E , en réalisant le changement de fonction inconnue $x(t)=\varphi(t)y(t)$.

5°) L'espace des solutions

Théorème :

Soit $a,b,c:I\to\mathbb{K}$ continues. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de $E:x''=a(t)x'+b(t)x+c(t)$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$ (c'est donc un plan affine).

6°) Méthode de la variation des constantes

Soit $a,b,c:I\to\mathbb{K}$ continues, $E:x''+a(t)x'+b(t)x=c(t)$ et $E_0:x''+a(t)x'+b(t)x=0$.

Supposons connu un système fondamental (φ,ψ) de solutions.

Pour λ,μ vérifiant $\begin{cases}\lambda'(t)\varphi(t)+\mu'(t)\psi(t)=0\\ \lambda'(t)\varphi'(t)+\mu'(t)\psi'(t)=c(t)\end{cases}$ on a $x(t)=\lambda(t)\varphi(t)+\mu(t)\psi(t)$ solution particulière de E .

V. L'épineux problème des raccords

1°) Résolution de l'équation $a(t)y'+b(t)y=c(t)$

Soit $a,b,c:I\to\mathbb{K}$ continues et E l'équation différentielle $a(t)y'+b(t)y=c(t)$.

Si a ne s'annule pas sur I alors $E\Leftrightarrow y'=-\dfrac{b(t)}{a(t)}y+\dfrac{c(t)}{a(t)}$ qu'on sait résoudre.

Si a s'annule alors on résout E sur les plus grands intervalles $J\subset I$ sur lesquels a ne s'annule pas puis on procède au raccord des solutions aux points où a s'annule par étude de continuité, de dérivabilité et de satisfaction de l'équation en ces points.

2°) Résolution de l'équation $a(t)y''+b(t)y'+c(t)y=d(t)$

Idem, pour les raccords mais avec étude de dérivabilité à l'ordre 2.